LE CERTEZZE IRRAGGIUNGIBILI DELLA MATEMATICA

di Silvia De Toffoli

1. INTRODUZIONE

Se c'è un dominio scientifico nel quale possiamo raggiungere qualche certezza, questo è la matematica – almeno così sembra. Solo in matematica possiamo utilizzare *dimostrazioni deduttive*. Si tratta di argomenti che non ammettono eccezioni. Se le premesse sono vere, la tesi di una dimostrazione è *sempre* vera. Non c'è scampo. Nelle scienze empiriche non si possono mai raggiungere simili certezze, neanche con i migliori argomenti. Gli esperimenti e gli argomenti induttivi possono essere molto convincenti, ma non saranno mai completamente definitivi.

Almeno possiamo trovare conforto nelle certezze della matematica, o quantomeno nelle certezze della matematica *contemporanea* visto che la matematica non è sempre stata sviluppata grazie a dimostrazioni completamente rigorose. La geometria di Euclide (~300 BCE), per esempio, ha una struttura assiomatica: da pochi postulati e assiomi evidenti, tutto il resto segue applicando delle regole logiche di base, o almeno questo sarebbe l'ideale. Ma Euclide non sempre è stato perfettamente rigoroso e in vari punti ricorre all'intuizione geometrica.

Anche la parte di matematica contemporanea che non deriva da Euclide e non era organizzata in forma assiomatica, come l'algebra araba o il calcolo differenziale, si è sviluppata grazie ad approcci e a risultati che ancor meno reggerebbero al vaglio degli attuali canoni di rigore.

Solo nel XIX secolo, grazie anche all'avvento della logica moderna, assistiamo a un processo di *rigorizzazione* della matematica. La logica sviluppata da Frege ci permette infatti di descrivere cosa sono le dimostrazioni in maniera precisa.

Benissimo. Dimentichiamo pure il passato e focalizziamoci sul presente. Con la nostra matematica possiamo ottenere tutte le certezze che cerchiamo! O no?

La situazione, purtroppo, non è così semplice. Ci sono due motivi principali per dubitare della possibilità di ottenere certezze – anche in matematica. Il primo riguarda i punti di partenza delle dimostrazioni, gli assiomi. Il secondo invece ha a che fare con il fatto che non siamo infallibili nel riconoscere la correttezza delle dimostrazioni. Analizzerò queste due possibili fonti di incertezza una per volta.

2. GLI ASSIOMI E LA LOGICA

Abbiamo detto che in matematica contemporanea il metodo privilegiato è quello delle dimostrazioni. Una dimostrazione consiste in una serie di proposizioni ottenute da proposizioni precedenti attraverso deduzioni logiche di base. Ma chiaramente questa non può essere tutta la storia.

Anche sorvolando sul fatto che le dimostrazioni di uso comune tra i matematici sono informali e che i loro passaggi sono a volte complessi e difficilmente decomponibili in deduzioni logiche di base, resta il problema dei punti di partenza.

Se ogni proposizione deve essere ottenuta da altri risultati già stabiliti corriamo il rischio di cadere in un *regresso infinito*. Dobbiamo quindi accettare delle proposizioni senza dimostrazioni se non vogliamo introdurre circolarità – cioè se vogliamo evitare di dire che certe proposizioni si giustifichino a vicenda.

In effetti, in matematica, certe proposizioni sono generalmente accettate come punti di partenza. Come possiamo, però, sceglierle e giustificarle?

Per esempio, il primo postulato della geometria euclidea ci dice che è possibile tracciare una linea retta per due punti qualsiasi nel piano. Va bene, sembra indiscutibile. Possiamo dire (forse) che non ha bisogno di essere giustificato. Così anche per il secondo, il terzo e il quarto. Ma come ben sappiamo, il V postulato è problematico – è il famigerato postulato delle parallele. Nel suo libro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euclide riscattato da ogni difetto*) pubblicato nel 1733, il gesuita Saccheri cercò di dimostrare che la negazione del V postulato portava a delle contraddizioni ma non ci riuscì. Al contrario il suo lavoro, che rimase pressoché sconosciuto fino alla sua riscoperta di Beltrami nel XIX secolo, può essere interpretato come un'esplorazione precoce e inconsapevole delle geometrie non euclidee. Negare il V postulato non ci porta quindi a delle contraddizioni, come aveva cercato di mostrare Saccheri, ma semplicemente a delle geometrie alternative a quella di Euclide, le geometrie non euclidee.

Se non siamo sicuri dei punti di partenza, come possiamo essere sicuri delle loro conseguenze?

Oggi le geometrie non euclidee sono parte della matematica comunemente accettata: non ci chiediamo, in matematica pura, se il postulato delle parallele sia vero o falso – diciamo piuttosto che il postulato delle parallele è vero nella geometria euclidea e falso nelle geometrie non euclidee.

Non è chiaro però se una soluzione simile sia percorribile per altri tipi di assiomi. Quello che ci interessa in questo contesto sono i fondamenti di tutta la matematica. Al giorno d'oggi è condivisa l'idea che questi fondamenti possano venir dati dalla teoria degli insiemi. Il sistema assiomatico standard a cui si può ricondurre la maggior parte della matematica contemporanea è quello di Zermelo Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma della scelta (ZFC). In particolare, tutti gli oggetti matematici (i numeri interi, i gruppi algebrici, etc.) hanno delle controparti nel mondo degli insiemi e i teoremi che li riguardano hanno delle controparti formali in ZFC.

Se una dimostrazione è corretta, sarà allora possibile convertirla in una dimostrazione formale in ZFC. Ciò è generalmente accettato dalla comunità matematica. D'altra parte, se viene dimostrato che una proposizione P è indipendente da ZFC (cioè se sia P che non-P sono compatibili con gli assiomi di ZFC), come è successo con l'ipotesi del continuo di Cantor, allora sarà una perdita di tempo cercare di dimostrare P.

Quindi per ogni dimostrazione informale ci sono delle controparti in ZFC – anche se la relazione tra una dimostrazione informale e una sua controparte formale non è per niente semplice da specificare. È proprio a partire dalla teoria degli insiemi che il collettivo francese riunito sotto lo pseudonimo di *Bourbaki,* fondato nel 1935, ha intrapreso il compito di riscrivere in maniera ultra-rigorosa tutta la matematica moderna.

Ma gli assiomi di ZFC non sono indiscutibili! Secondo alcuni possiamo accertarci di certi assiomi della teoria degli insiemi attraverso una facoltà cognitiva simile alla percezione, ma applicata alla matematica. L'esistenza di tale «percezione intellettuale» viene sostenuta soprattutto da chi ha una visione platonista della matematica, cioè da chi crede che gli oggetti matematici esistano indipendente da noi e che noi esploriamo con le nostre ricerche il mondo della matematica che già esiste. Per esempio, secondo Kurt Gödel (1964, 268) «abbiamo una specie di percezione per gli oggetti della teoria degli insiemi, come si vede dal fatto che gli assiomi si impongono su di noi come veri» ([1]). In questo senso certi assiomi sarebbero delle proposizioni evidenti che non necessitano di ulteriori giustificazioni.

Questa «percezione matematica» rimane però qualcosa di misterioso – di non spiegato. Inoltre, anche Gödel riconosce che certi assiomi vengono giustificati attraverso metodi *estrinseci*, euristici e induttivi. Per esempio, potremmo voler accettare un assioma non perché è indiscutibile ma perché rende possibile dimostrare molti risultati, alcuni dei quali ci sembrano indiscutibili.

Certo, queste sono considerazioni molto astratte, ma il succo è che non è per niente banale capire come giustificare gli assiomi. Per questo motivo c'è un dibattito in corso sul tema in filosofia della matematica ([2]). Ciò suggerisce che, in questo campo, le certezze possiamo scordarcele.

Si potrebbe obbiettare che in fondo questi non sono problemi che riguardano i matematici, ma i logici. I matematici si interessano di *matematica*, non dei *fondamenti della matematica*. Forse per i matematici è sufficiente stabilire delle proposizioni di tipo condizionale: «*se* gli assiomi sono veri, *allora* anche il mio teorema è vero». Come diceva Bertrand Russell (1903, ix), «la matematica pura è la classe di proposizioni della forma p implica q,…». Anche questo approccio, però, non è del tutto soddisfacente.

Ora che ho dato un'idea della difficoltà di giustificare gli assiomi, dirò due parole anche sulla difficoltà di giustificare i principi logici che usiamo per arrivare in maniera rigorosa a risultati matematici partendo dagli assiomi.

Come facciamo a decidere quali inferenze logiche sono accettabili? E come le giustifichiamo? Nel famoso dialogo «What the tortoise said to Achilles» Lewis Carroll (1895) mostra la difficoltà (se non l'impossibilità) di giustificare inferenze logiche di base come il *modus ponens,* cioè il principio che ci permette di inferire la conclusione «Q» dalle premesse «se P, allora Q» e «P».

Ma in matematica si usano delle inferenze ben più controverse, come per esempio il *principio del terzo escluso*. Se P è una proposizione matematica, allora o P è

([1]) «[W]e do have something like a perception of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true.»
([2]) (Maddy 2011).

vera o lo è la sua negazione. Questo principio è importantissimo perché ci consente di usare le dimostrazioni per assurdo. Cioè, per dimostrare P, iniziamo con l'assumere la negazione di P per poi ottenere una contraddizione.

Non tutti accettano il principio del terzo escluso. In particolare, all'inizio del XX secolo, il matematico olandese L.E.J. Brouwer negò la sua validità fondando la scuola intuizionista – si noti che così facendo negò anche la validità del suo famoso teorema del punto fisso assieme a moltissimi altri teoremi della matematica classica. David Hilbert, opponendosi a Brouwer, disse che togliere il principio del terzo escluso a un matematico sarebbe come togliere l'uso dei pugni a un pugile. Non si può proprio fare! E infatti i matematici continuarono a usarlo in tutta tranquillità. D'altra parte ci sono ancora logici e matematici intuizionisti e quindi non è possibile archiviare la questione come superata.

Possiamo anche negare altri principi logici. La logica paraconsistente nega il principio *ex-falso quodlibet*, secondo il quale da una contraddizione possiamo dedurre qualsiasi proposizione. Nella logica classica, una contraddizione è *esplosiva*, distrugge tutto, proprio perché implica qualsiasi proposizione. Ma la logica paraconsistente nega questo principio e così facendo lascia spazio a certe contraddizioni. E infatti questa è la logica favorita dei *dialetheists*, ovvero di quei filosofi che, come Grahm Priest (2002), credono che delle proposizioni siano *sia vere che false* – un'eresia molto pericolosa per i logici classici. Un candidato per proposizioni vere e false è quello che dà origini al paradosso del mentitore: «questa proposizione è falsa».

Di nuovo, le questioni che hanno a che fare con i principi logici, potremmo dire, sono problemi da logici più che da matematici. Come matematici, dobbiamo sì abbandonare il sogno di una certezza incondizionata ma possiamo comunque ottenere *certezze condizionali*. Ci accontenteremo quindi di dire: «questo teorema è vero se lo sono gli assiomi e se la logica classica è corretta». Tutto sommato possiamo anche dire che quando i matematici dicono «questo teorema è vero» in realtà quello che intendono è indicare una verità condizionale: «questo teorema è vero… *pss*… se lo sono gli assiomi e se la logica classica è corretta».

Tuttavia, come spiegherò nella prossima sezione, anche queste certezze condizionali non sono poi così semplici da raggiungere.

3. LE «SIMIL-DIMOSTRAZIONI»

C'è una seconda ragione per cui la certezza continua a sfuggirci. La matematica, come tutte le altre scienze, è un'attività umana che quindi è suscettibile ai nostri limiti cognitivi e alla nostra tendenza a sbagliare. Anche se le dimostrazioni sono teoricamente argomenti che dovrebbero offrirci una certezza assoluta, seppur condizionale, non possiamo ignorare il fatto che noi non siamo infallibili nel riconoscerle.

Il mio esempio preferito riguarda il teorema dei 4 colori. Questo teorema dice che sono sufficienti 4 colori per colorare una mappa piana in modo che due regioni adiacenti non abbiano mai lo stesso colore. Sicuramente i cartografi se ne erano resi conto da tempo. La congettura dei 4 colori però entrò nel radar dei matematici quando fu comunicata a Augustus De Morgan attorno alla metà del XIX secolo.

Nonostante l'apparente semplicità della congettura, il matematico inglese non riuscì a trovare una dimostrazione. Solo nel 1879 Alfred Bray Kempe finalmente pubblicò una «dimostrazione» e la congettura fu considerata risolta. La sua «dimostrazione» divideva il problema in vari sotto-casi ed era molto meticolosa. Fu pubblicata e accettata dai matematici del tempo. Però 11 anni più tardi Percy Heawood mostrò che quella di Kempe non era una vera dimostrazione. Infatti uno dei suoi sotto-casi ammetteva delle eccezioni. Insomma, la dimostrazione di Kempe non considerava tutti i casi possibili (Sipka 2002) – conteneva un errore e quindi non era una vera dimostrazione!

Ci volle più di un secolo per dimostrare finalmente la congettura e trasformarla nel teorema dei 4 colori. Ciò fu fatto usando la struttura della dimostrazione di Kempe ma ricorrendo a una notevole mole di calcoli, superiore alle capacità umane e svolta automaticamente; è considerata la prima dimostrazione assistita da computer.

L'argomento originale di Kempe quindi non era una vera e propria dimostrazione, ma una «simil-dimostrazione», cioè un argomento matematico che soddisfa i criteri di accettabilità della comunità a cui è diretto e che quindi può essere facilmente scambiato per una vera dimostrazione ma magari non lo è ([3]). Kempe aveva ideato un argomento meticoloso che ha convinto la comunità di matematici del tempo – non un argomento palesemente sbagliato. Quasi tutte le simil-dimostrazioni sono corrette e sono quindi dimostrazioni, ma ci sono delle eccezioni.

Questo caso mette in luce il fatto che anche in matematica si possono fare errori. Gli argomenti che vengono chiamati dimostrazioni non sono sempre autentiche dimostrazioni, ma possono anche essere simil-dimostrazioni erronee. Un altro caso famoso è quello del lemma di Dehn in topologia a basse dimensioni e un caso più recente riguarda alcuni risultati di Vladimir Voevodsky. Dopo aver vinto la medaglia Fields nel 2002 il matematico russo si rese conto che c'erano degli errori in vari articoli che aveva pubblicato – fu lui stesso a scovare tali errori un decennio dopo la loro pubblicazione!

Questo lo impaurì. Negli ultimi anni della sua carriera si impegnò nello sviluppo e nella promozione di *assistenti di dimostrazione iterativi*. Si tratta di software che permettono di creare una dimostrazione formale la cui correttezza può essere controllata automaticamente da un computer, a partire da dimostrazioni informali ([4]). Secondo Voevodsky una dimostrazione ostica pubblicata da un matematico famoso non viene abitualmente controllata in dettaglio da molti altri matematici. E questo è un problema. Infatti, più le simil-dimostrazioni vengono sottoposte allo scrutinio di matematici diversi, più cresce la probabilità che siano effettivamente corrette. L'attività di auto-controllo della comunità dei matematici è essenziale specialmente perché la matematica contemporanea è sempre più sofisticata.

La mancanza di questo controllo da parte di altri matematici è una preoccupazione anche per Peter Scholze, uno dei giovani geometri algebrici più stimati al momen-

([3]) Ho introdotto questa terminologia in (De Toffoli 2021).
([4]) (Avigad and Harrison 2014).

to. Con un suo collaboratore, Dustin Clausen, ha proposto un nuovo framework per rivoluzionare l'organizzazione della matematica attuale. Per unificare sotto un unico quadro concettuale l'approccio della geometria algebrica con quello della topologia ha introdotto il nuovo concetto di *spazio condensato.* Affinché una proposta così ambiziosa sia accettabile, dobbiamo esser sicuri di poter ricostruire la matematica che già conosciamo all'interno del framework della matematica condensata. In particolare dobbiamo riuscire a reinterpretare l'analisi reale classica.

Superando numerose difficoltà tecniche, Scholze è riuscito a dimostrare che ciò è possibile – si veda il Teorema 9.4 delle sue dispense di geometria analitica (Scholze 2019). Benissimo. Ma poi, vista l'importanza fondazionale di questo teorema, voleva essere certo di non aver commesso errori e decise di chiedere a vari colleghi cosa pensavano della sua dimostrazione. Purtroppo, gli altri matematici ammisero che sì, erano convinti che fosse giusta ma non avevano controllato tutti i dettagli in prima persona!

Scholze, per questo motivo, ha deciso di rivolgersi alla comunità degli sviluppatori di *Lean*, un assistente di prova interattivo che recentemente ha attratto l'attenzione di numerosi matematici ([5]). Questa è una mossa insolita visto che la tecnologia degli assistenti di dimostrazione iterativi al momento è ancora inaccessibile alla maggioranza dei matematici e non è usata per controllare risultati di ricerca contemporanea. Ma se non vogliono controllare gli umani, magari potranno controllare i computer, avrà pensato Scholze!

E la comunità di *Lean*, guidata da Johan Commelin, è recentemente riuscita nell'opera, in soli 6 mesi. Un risultato sorprendente ottenuto alla fine di maggio del 2021 ([6]).

Adesso sì che possiamo metterci il cuore in pace. È vero che anche i software possono contenere errori, ma gli assistenti di dimostrazione iterativi hanno solitamente un kernel molto contenuto e controllato molto accuratamente. La probabilità, quindi, che uno di questi software commetta un errore è molto minore in confronto alla probabilità che un matematico introduca un errore involontario in una dimostrazione – infatti, piccoli errori senza conseguenze sono ubiqui in matematica. Anche Scholze ha ammesso che il processo di formalizzazione ha scovato delle imprecisioni nella sua dimostrazione.

Va detto che i risultati contemporanei che sono stati verificati in questo modo sono ancora pochi. Ci sono dei buoni traguardi, ma siamo ben lontani dall'uso di routine di questi strumenti. Un risultato da notare è proprio la dimostrazione del teorema dei 4 colori – essendo una dimostrazione che usava i computer, aveva lasciato la comunità dei matematici (e dei filosofi della matematica) un po' perplessa. Nel 2004 Georges Gonthier riuscì a creare una dimostrazione formale in *Coq* (un altro assistente di prova interattivo) togliendo ogni dubbio (ragionevole) che poteva restare sulla sua correttezza.

([5]) Il suo appello alla comunità di *Lean* può essere letto qui: https://xenaproject.wordpress.com/2020/12/05/liquid-tensor-experiment/.

([6]) https://xenaproject.wordpress.com/2021/06/05/half-a-year-of-the-liquid-tensor-experiment-amazing-developments/.

Chissà cosa porterà il futuro. Certi studiosi prevedono che in pochi anni, o decenni, assieme alle dimostrazioni tradizionali verranno richieste anche delle dimostrazioni formali controllate automaticamente. Forse. Per ora, in ogni caso, dobbiamo accontentarci nella maggioranza dei casi di *referees* umani.

4. CONCLUSIONE

In fondo non c'è da stupirsi. La matematica è un'attività umana. E per noi umani le certezze sono difficili da raggiungere. Non solo non possiamo ottenere certezze incondizionate, ma anche le certezze condizionali agli assiomi e ai principi logici tendono a sfuggirci.

Se fossi veramente certa che il mio nome è Silvia, e se fossi una creatura completamente razionale, allora sarei disposta ad accettare scommesse spropositate. Per esempio, accetterei di scommettere la mia casa contro 1 singolo euro che il mio nome è Silvia. Ma non lo farei mai! Ci potrebbero esser stati degli errori burocratici per cui nel mio certificato di nascita il mio nome è stato scritto sbagliato. Molto improbabile. Sì, ma pur sempre possibile.

E così anche per la matematica, soprattutto per la matematica sofisticata. *Se* le nostre (simil-)dimostrazioni sono corrette, allora i nostri teoremi sono veri (…*pss* condizionali agli assiomi e alla logica) – ma questo è un grande «se».

Silvia De Toffoli
silvia.detoffoli@gmail.com

Bibliografia

Avigad, Jeremy, and John Harrison. 2014. «Formally verified mathematics.» *Communications of the ACM* 57 (4): 66-75.
Carroll, Lewis. 1895. «What the tortoise said to Achilles.» *Mind* 4 (14): 278-280.
De Toffoli, Silvia. 2021. «Groundwork for a fallibilist account of mathematics.» *The Philosophical Quarterly* 71 (4): 823-844.
Gödel, Kurt. 1964. «What is Cantor's Continuum Problem?» In *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam, 258-273. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
Maddy, Penelope. 2011. *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Oxford University Press.
Priest, Graham. 2002. *Beyond Limits of Thought*. Oxford University Press UK.
Russell, Bertrand. 1903. *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press.
Scholze, Peter. 2019. Lectures on Analytic Geometry. https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf.
Sipka, Timothy. 2002. «Alfred Bray Kempe's «proof» of the Four Color Theorem.» *Math Horizons* 10 (2): 21-23, 26.